1$^{\text{ο}}$ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΡΟΔΟΥ – ΒΕΝΕΤΟΚΛΕΙΟ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2018-2019

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $\left(f+g\right)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α2. Θεωρήστε τον ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με $f(x)>0$ κοντά στο x_0, για την οποία υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\in R$, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στην κόλλα σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ** αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

Α3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή και **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ με συνεχή πρώτη παράγωγο τότε $\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta+\int_\beta^\alpha f(x)g'(x)dx$.

β. Κάθε συνάρτηση f συνεχής στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $(\beta,\gamma]$, είναι συνεχής και στο $[\alpha,\gamma]$.

γ. Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα Δ, η οποία δεν είναι 1-1, τότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο Δ.

δ. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

ε. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ με $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$, ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Θέμα Β

Έστω οι συναρτήσεις $g(x)=\frac{e^x}{x}-1$ και $h(x)=\ln x$.

Β1. Να ορίσετε την συνάρτηση $f=goh$.

Β2. Αν $f(x)=\frac{x-\ln x}{\ln x}$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες και το σύνολο τιμών της f.

Β4. Με τη βοήθεια των παραπάνω να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to R$, παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν $f(e)=1$ και $xf'(x)\ln x=f(x) \quad ,\forall x\in(1,+\infty)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{\ln x}$, είναι σταθερή και $f(x)=\ln x$ με $x\geq 1$.

Γ2. Ένα σημείο Μ(α, lnα) με α > 1, κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f. Έστω Α, Β οι προβολές του σημείου Μ πάνω στους ημιάξονες Οx, Oy αντίστοιχα.

α. Να γράψετε σαν συνάρτηση του α το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και την ευθεία x = α.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική θέση του Μ τέτοια ώστε η C_f να χωρίζει το ορθογώνιο ΟΑΜΒ σε δύο ισοδύναμα χωρία.

γ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\omega=\text{ΑΓΜ}$, όπου Γ(1, 0), τη στιγμή που το Μ περνάει από το σημείο $(e^2,2)$ και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 4μον./sec

Θέμα Δ

Έστω συνάρτηση $f:R\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν $f(0)=1$, $f'(0)=0$ και $f''(x)>0 \quad ,\forall x\in R$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\eta\mu x$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $xf'(x)+1\geq f(x) \quad ,\forall x\geq 0$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι $1<\int_0^1 f(x)dx<\frac{f(1)+1}{2}$.

Δ5. Να αποδείξετε ότι $\int_1^3 f(x)dx<\int_2^4 f(x)dx$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ: Μαρτάκης, Μ., Μαλλιάκας Κ., Αρνικίου Δ.